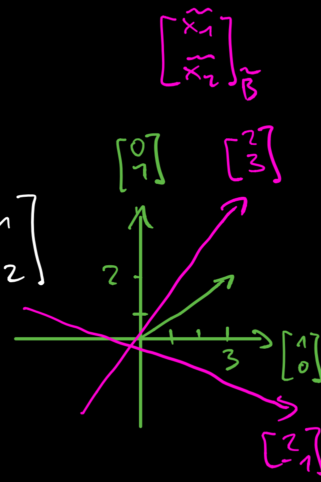
# Übungsstunde 6:

## Themen:

- Koordinaten in einer bestimmten Basis
- Koordinatentransformation & Basiswechsel
- Lineare Abbildungen

## Koordinaten in einer bestimmten Basis:

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$




$$\underline{x} = x_1 \cdot \underline{b}^{(1)} + x_2 \cdot \underline{b}^{(2)} + \dots + x_n \underline{b}^{(n)}$$

**Beispiel 6.1:**

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x, y \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R}^2$$

$$\underline{\underline{B}} = [\underline{b}^{(1)}\ \underline{b}^{(2)}] = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}, \quad \underline{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -10 \end{bmatrix}$$

Wollen $[\underline{v}]_{\underline{\underline{B}}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, wir wissen $\underline{v} = x_1 \cdot \underline{b}^{(1)} + x_2 \cdot \underline{b}^{(2)}$

$$\Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ -10 \end{bmatrix}}_{\underline{v}} = x_1 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2 \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{B}}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{\underline{x}}$$

$\rightarrow$ Müssen einfach gaussen um die Koordinaten zu finden! $\Rightarrow \underline{x} = \underline{\underline{\frac{1}{7} \begin{bmatrix} 40 \\ -22 \end{bmatrix}}} = [\underline{v}]_{\underline{\underline{B}}}$

**Beispiel 6.2:** $U = \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^4 \mid x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \}$

$$x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \iff \begin{bmatrix} 0 & \boxed{1} & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$x_4 = t \in \mathbb{R}$
$x_3 = s \in \mathbb{R}$
$x_1 = u \in \mathbb{R}$
$x_2 = 2x_3 - x_4$
$= 2s - t$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{L} = \left\{ \begin{bmatrix} u \\ 2s-t \\ s \\ t \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; u,s,t \in \mathbb{R} \right\} = \mathcal{U}$$

$$= \left\{ u \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; u,s,t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \underline{\underline{\operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}}}$$

$\rightarrow$ 3-dimensionaler UVR!

Frage: $B = \{ b^{(1)} = 1, b^{(2)} = x-2, b^{(3)} = x^2 \} \hat{=} \mathcal{P}_2$ (Polynome Grad $\leq 2$)

Referenz: Standardbasis: $e^{(1)} = 1, e^{(2)} = x, e^{(3)} = x^2$ (Die Monome)

Was sind die Koordinaten von $p(x) = 7x^2 - 4x \underline{+4}$

$$\Rightarrow [p(x)]_B = -4(1) - 4(x-2) + 7(x^2) = \underline{\underline{\begin{bmatrix} -4 \\ -4 \\ 7 \end{bmatrix}}} \qquad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$= -4 - 4x + 8 + 7x^2$$

$$= 7x^2 - 4x + 4$$

$$[p(x)]_E = 4 \cdot (1) - 4(x) + 7(x^2) = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 4 \\ -4 \\ 7 \end{bmatrix}}}$$

In der Standardbasis

# Koordinatentransformation & Basiswechsel:

Ausgangslage:

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ \tilde{b}^{(1)} & \tilde{b}^{(2)} & \dots & \tilde{b}^{(n)} \\ | & | & & | \end{bmatrix}$$

$$[\underline{v}]_{\tilde{B}} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \vdots \\ \tilde{x}_n \end{bmatrix} \xrightarrow[\underline{\underline{T}}]{\text{wollen}} [\underline{v}]_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ b^{(1)} & b^{(2)} & \dots & b^{(n)} \\ | & | & & | \end{bmatrix}$$

$$\underline{v} = \tilde{x}_1 \begin{bmatrix} | \\ \tilde{b}^{(1)} \\ | \end{bmatrix} + \tilde{x}_2 \cdot \begin{bmatrix} | \\ \tilde{b}^{(2)} \\ | \end{bmatrix} + \dots + \tilde{x}_n \begin{bmatrix} | \\ \tilde{b}^{(n)} \\ | \end{bmatrix}$$

$$= x_1 \begin{bmatrix} | \\ b^{(1)} \\ | \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} | \\ b^{(2)} \\ | \end{bmatrix} + \dots + x_n \begin{bmatrix} | \\ b^{(n)} \\ | \end{bmatrix}$$

Gesucht!

$$= \tilde{x}_1 \underbrace{\left( a_1 \begin{bmatrix} | \\ b^{(1)} \\ | \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} | \\ b^{(2)} \\ | \end{bmatrix} + \dots + a_n \begin{bmatrix} | \\ b^{(n)} \\ | \end{bmatrix} \right)}_{\begin{bmatrix} | \\ \tilde{b}^{(1)} \\ | \end{bmatrix}} + \tilde{x}_2 \left( c_1 \begin{bmatrix} | \\ b^{(1)} \\ | \end{bmatrix} + \dots \right) + \dots$$

$$= \underbrace{\left( \tilde{x}_1 a_1 + \tilde{x}_2 c_1 + \dots \right)}_{x_1} \begin{bmatrix} | \\ b^{(1)} \\ | \end{bmatrix} + \underbrace{\left( \tilde{x}_1 a_2 + \tilde{x}_2 c_2 + \dots \right)}_{x_2} \begin{bmatrix} | \\ b^{(2)} \\ | \end{bmatrix} + \dots$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{T}} \, [\underline{v}]_{\tilde{B}} = [\underline{v}]_B$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{T}} = \overbrace{\begin{bmatrix} a_1 & c_1 & d_1 & \dots \\ a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n & c_n & d_n \end{bmatrix}}^{n} = \begin{bmatrix} | & | & \\ [\tilde{b}^{(1)}]_B & [\tilde{b}^{(2)}]_B & \dots \\ | & | & \end{bmatrix}$$

Bsp 6.4: Sei $V$ ein Vektorraum mit

$\tilde{B} = \{ 3t, 2t^2+2, t+1 \}$ die alte Basis &

$B = \{ 1, t, t^2 \}$ die neue Basis

Müssen nur die Koordinatendarstellung der alten Basis in der neuen Basis finden $\to$ Spalten der Basiswechselmatrix $T$:

Koordinaten

$$\left.\begin{array}{lll} \tilde{b}^{(1)} = 3t = & 0 \cdot 1 + 3 \cdot t + 0 \cdot t^2 & \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \tilde{b}^{(2)} = 2t^2 + 2 = & 2 \cdot 1 + 0 \cdot t + 2 \cdot t^2 & \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \\ \tilde{b}^{(3)} = t + 1 = & 1 \cdot 1 + 1 \cdot t + 0 \cdot t^2 & \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array}\right\} \underline{\underline{T}} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \end{bmatrix}$$

Matrix aus den Koeffizienten bilden & transponieren!

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{T}} \cdot [\underline{v}]_{\tilde{B}} = [\underline{v}]_B, \quad \underline{\underline{S}} = \underline{\underline{T}}^{-1}$$

$$\underline{\underline{S}} \cdot [\underline{v}]_B = [\underline{v}]_{\tilde{B}}$$

Formeln:

"Alte Basis zur neuen Basis": $\underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{T}} = \underline{\underline{\tilde{B}}}$, $\underline{\underline{T}} \cdot [\underline{v}]_{\tilde{B}} = [\underline{v}]_B$

"Neue Basis" · "BWM alt zu neu" = "alte Basis"

$\hookrightarrow$ unintuitiv!

"Neue Basis zur alten Basis": $\underline{\underline{\tilde{B}}} \cdot \underline{\underline{S}} = \underline{\underline{B}}$, $\underline{\underline{S}} \cdot [\underline{v}]_B = [\underline{v}]_{\tilde{B}}$

(Als Beispiel $\in \mathbb{R}^3$)

$$\underline{\underline{\tilde{B}}} = \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{T}} = \begin{bmatrix} | & | & | \\ b^{(1)} & b^{(2)} & b^{(3)} \\ | & | & | \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{bmatrix}$$

$$= \Bigg[ \underbrace{\left[ t_{11} \begin{bmatrix} | \\ b^{(1)} \\ | \end{bmatrix} + t_{21} \begin{bmatrix} | \\ b^{(2)} \\ | \end{bmatrix} + t_{31} \begin{bmatrix} | \\ b^{(3)} \\ | \end{bmatrix} \right]}_{\begin{bmatrix} | \\ \tilde{b}^{(1)} \\ | \end{bmatrix}} \quad \underbrace{t_{12} \begin{bmatrix} | \\ b^{(1)} \\ | \end{bmatrix} + \ldots}_{\begin{bmatrix} | \\ \tilde{b}^{(2)} \end{bmatrix}}$$

$$\underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{T}} = \underline{\underline{\tilde{B}}} \iff B \mid \tilde{B} \overset{\text{Gauss-Jordan}}{\Rightarrow} I \mid T$$

$$\Updownarrow$$

$$I \cdot \underline{\underline{T}} = \underline{\underline{T}}$$

## Abbildungen unter der BWM:

$F : V \to V$ linear

- $[F]_{\tilde{B}} = \underline{\underline{\tilde{A}}}$ Darstellungsmatrix von $F$ in der alten Basis
- $[F]_B = A$ " " " " neuen Basis
- $\underline{\underline{T}}$ Basiswechselmatrix von $\tilde{B} \to B$

Kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\tilde{x} & & \tilde{y} \\
\tilde{B} \bullet \arrow[rr, "{[F]_{\tilde{B}} = \underline{\underline{\tilde{A}}}}"] \arrow[d, "\underline{\underline{T}}"'] & & \bullet \tilde{B} \\
B \bullet \arrow[rr, "{[F]_B = \underline{\underline{A}}}"'] & & B \bullet \arrow[u, "\underline{\underline{S}}"'] \\
\underline{x} & & \underline{y}
\end{tikzcd}$$

$$[F]_{\tilde{B}} = \cancel{TAS}$$

$\Rightarrow \underline{\underline{S}} = \underline{\underline{T}}^{-1}$ " "

$B \longrightarrow \tilde{B}$

$$\tilde{A} = [F]_{\tilde{B}} = \underline{\underline{S}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{T}} = \underline{\underline{T}}^{-1}\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{T}} \quad \Leftrightarrow \quad A = \underline{\underline{T}}\,\underline{\underline{\tilde{A}}}\,\underline{\underline{T}}^{-1}$$

$$[F]_{\tilde{B}}\,\underline{v} = \underline{\underline{S}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{T}}\,\underline{v}$$

Matrixmultiplikation ist rechtsassoziativ!

↳ Reihenfolge muss also "umgedreht" werden.